



# Chyby měření

210DPSM

Jan Zatloukal



# Stručný přehled

- Zdroje a druhy chyb
- Systematické chyby měření
- Náhodné chyby měření
- Spojité a diskrétní náhodné veličiny
- Normální rozdělení a jeho vlastnosti
- Odhad parametrů normálního rozdělení



# Zdroje a druhy chyb

- Chyba měření  $\varepsilon$ : rozdíl mezi skutečnou hodnotou  $x$  zjišťované veličiny  $X$  a naměřenou hodnotou  $x_m$ :  $\varepsilon = x_m - x$
- Absolutní / relativní chyba:
  - Absolutní chyba  $\delta x_0$ , zápis  $x = x_0 \pm \delta x_0$
  - Relativní chyba  $\xi x_0 = \frac{\delta x_0}{x_0}$ , bezrozměrná nebo %



# Rozdělení chyb podle charakteru

- Systematické chyby – nelze odstranit výpočtem
- Náhodné chyby – možno kvantifikovat pomocí statistickým metod
- Hrubé chyby – možné odstranit vyřazením ze souboru

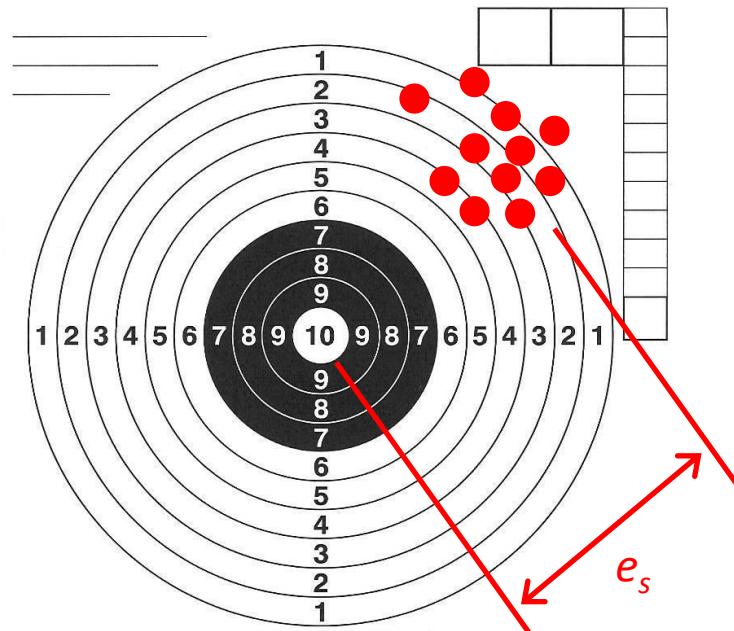


# Zdroje chyb

- Měřený objekt
- Vliv prostředí
- Měřicí metoda
- Měřicí zařízení
- Pozorovatel
- Vyhodnocení



# Systematické chyby měření



Vzduchová puška

[www.gunshop.cz](http://www.gunshop.cz), Čsl. Legií 299, 514 01 Jilemnice



# Chyby metody

- přibližné vztahy popisující daný děj
- chybný teoretický model
- zanedbání vlivů, které ovlivňují měření
- postupné odstraňování zpřesňováním modelu jevu
- není třeba odstraňovat chyby modelu menší než dosažitelná chyba měření
- složité modely komplikují měření



# Chyby měřidel

- nedokonalé provedení přístrojů, špatné seřízení, nevhodné použití
- odhalování pomocí normálu (etalonu) měřené veličiny
- pomocí etalonu možnost vytvoření korekční křivky přístroje
- možnost porovnání měření dvěma přístroji, pokud druhé je určité v pořádku
- s časem se chyba měřidel mění, je třeba seřizovat průběžně





# Chyby pozorování

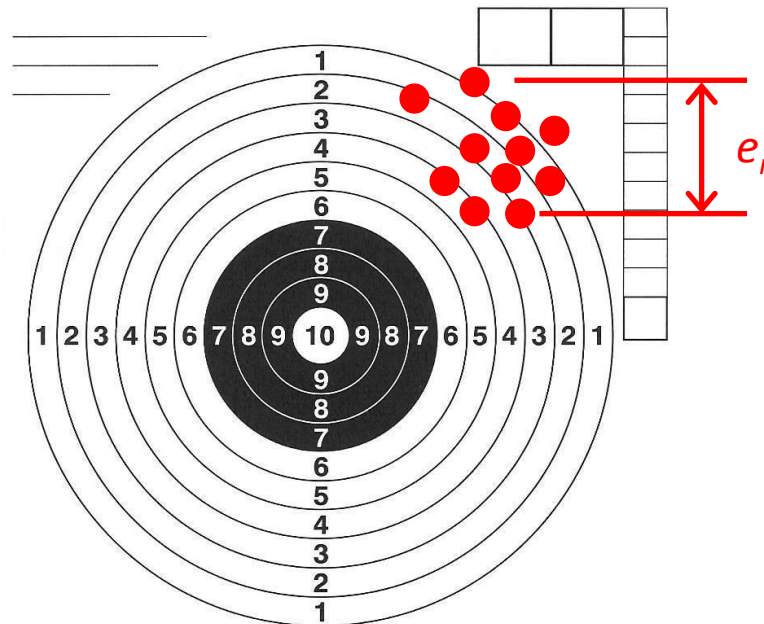
- nedokonalost pozorovacích schopností člověka
- špatný přístup a návyky experimentátora
- vyloučení lidského faktoru z měřicího procesu (objektivizace měření)
- měření opakovaná různými experimentátory



# Chyby vyhodnocování

- použití nevhodné numerické metody
- náhrada spojité fyzikální veličiny diskrétními hodnotami a jejich zápis
- ztráty platných cifer v důsledku operací s malými a velkými čísly
- odstranění změnou výpočetního postupu nebo použitím lepšího datového typu

# Náhodné chyby přímých měření



Vzduchová puška

[www.gunshop.cz](http://www.gunshop.cz), Čsl. Legií 299, 514 01 Jilemnice



# Náhodné chyby

- pro každé jednotlivé měření nelze s jistotou určit, jaká hodnota bude naměřena (i při měření konstantní veličiny)
- náhodný charakter měření neznamená ztrátu informace o měřené veličině
- soubor většího počtu měření vykazuje určité charakteristiky, z nichž lze odhadnout skutečnou hodnotu měřené veličiny
- popisem těchto vlastností se zabývá matematická statistika
- rozdílný popis pro veličiny diskrétní a veličiny spojité



# Diskrétní veličiny

- součet všech dosažitelných hodnot pravděpodobnosti = 1
- pro každou pravděpodobnost platí  $P(x) \leq 1$
- konečný nebo spočetný počet hodnot
- pojmy: pravděpodobnost výskytu hodnoty



# Spojité veličiny

- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$
- pro každou pravděpodobnost platí
$$P(x) \in \langle a; b \rangle \leq 1$$
- nespočetně mnoho hodnot
- pojmy: hustota pravděpodobnosti  $f(x)$   
(pravděpodobnost výskytu prvku intervalu),  
distribuční funkce



# Rozlišení diskrétní / spojitá veličina

- měřené veličiny jsou ze své fyzikální podstaty v drtivé většině spojité
- ve skutečnosti většina měření poskytuje diskrétní hodnoty – jsme schopni zaznamenat měření jako číslo s konečným počtem cifer
- pro rozlišení diskrétní/spojitá veličina je důležitý vztah mezi nejmenší rozlišitelnou hodnotou měření a tzv. směrodatnou odchylkou měřené proměnné
- pokud je směrodatná odchylka podstatně větší než nejmenší rozlišitelná hodnota měření, lze veličinu považovat za spojitou



# Hustota pravděpodobnosti

- u spojitých veličin nemá smysl hledat pravděpodobnost výskytu jedné hodnoty, tato je nekonečně malá
- má smysl pouze určovat pravděpodobnost výskytu hodnoty v intervalu
- četnost výskytu: počet výsledků spadajících do daného intervalu / celkový počet měření
- histogram: graficky znázorněné četnosti výskytu po jednotlivých intervalech
- funkce hustoty pravděpodobnosti  $f(x)$  plně popisuje vlastnosti náhodné proměnné

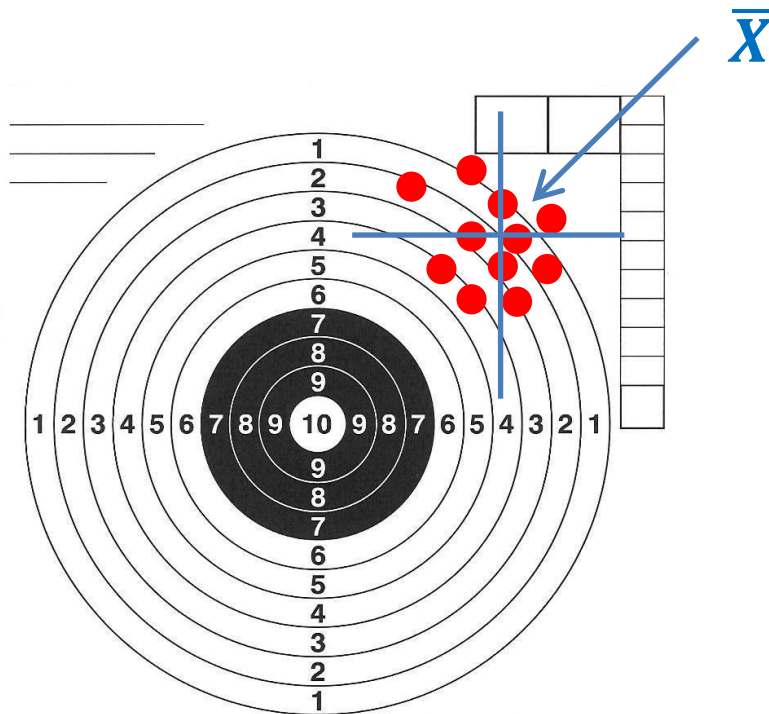




# Distribuční funkce $F(x)$

- obor hodnot od 0 od 1
- funkce neklesající
- $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$

# Střední hodnota



Vzduchová puška

www.gunshop.cz, Čsl. Legií 299, 514 01 Jilemnice

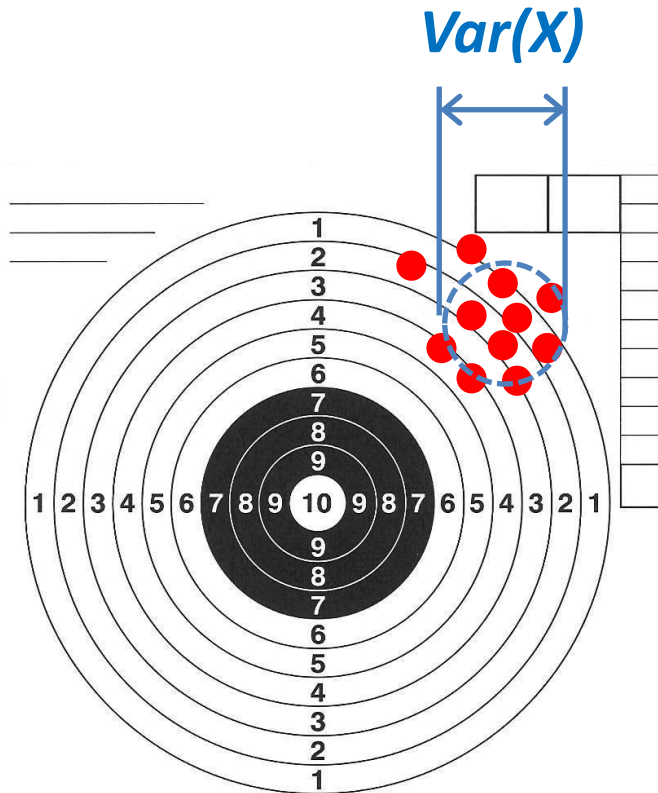
- Diskrétní veličina:

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

- Spojitá veličina:

$$\bar{X} = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

# Rozptyl



Vzduchová puška

www.gunshop.cz, Čsl. Legií 299, 514 01 Jilemnice

- Diskrétní veličina:

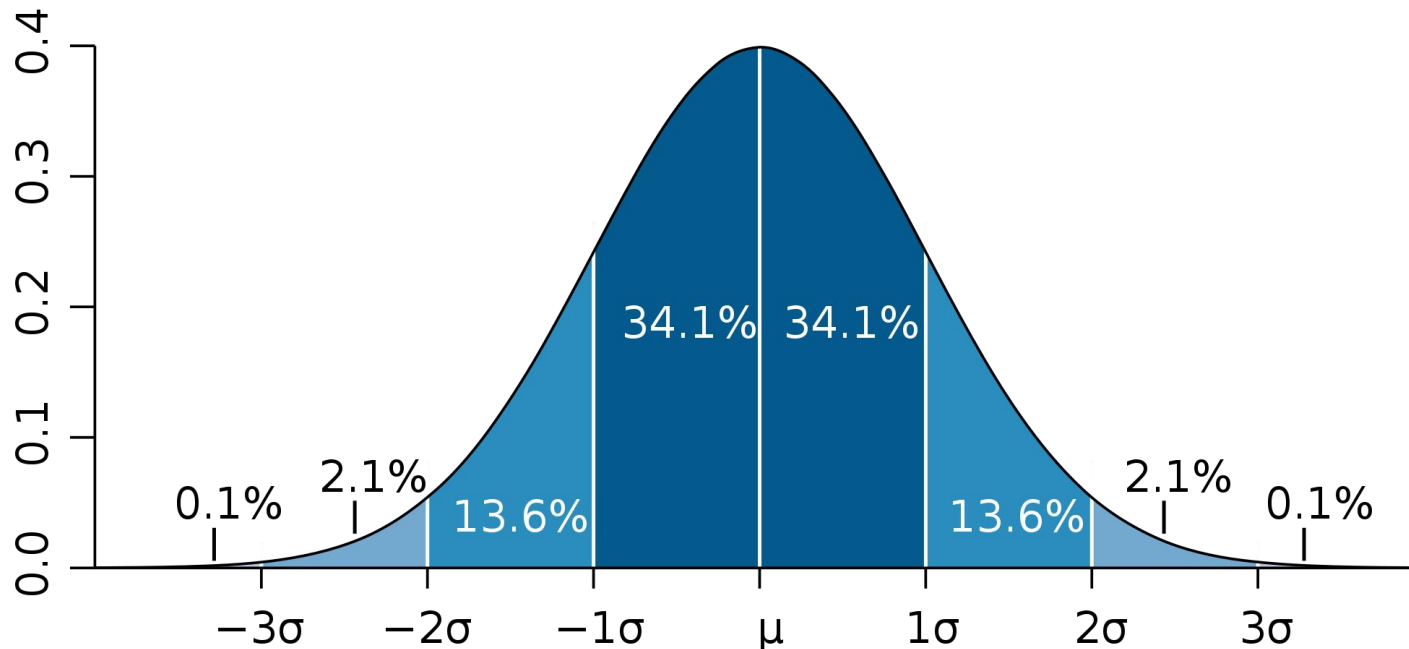
$$Var(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

- Spojitá veličina:

$$Var(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (X - \bar{X})^2 f(x) dx$$

- Odmocnina z rozptylu se nazývá směrodatná odchylka

# Normální rozdělení a jeho vlastnosti



- Hustota pravděpodobnosti:

$$f(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

- Distribuční funkce:

$$F(x; \mu, \sigma) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dt$$



# Normální rozdělení a jeho vlastnosti

- Hustota pravděpodobnosti normálního rozdělení je definovaná pro všechna reálná  $x$  a pro všechna  $x$  z intervalu  $(-\infty ; +\infty)$  je  $f(x) > 0$
- Pro  $x = \mu$  nabývá funkce  $f(x)$  maxima
- Hustota pravděpodobnosti normálního rozdělení je funkce sudá vůči poloze maxima
- Střední hodnota  $E$  náhodné proměnné, která se řídí normálním rozdělením je  $E(x) = \mu$



- Střední hodnota náhodné veličiny je rovna její skutečné hodnotě  $x^*$
- Parametr  $\sigma$  udává pološířku křivky normálního rozdělení mezi inflexními body
- Parametr  $\sigma$  je významnou veličinou z hlediska pravděpodobnostního počtu, nazývá se směrodatná odchylka neboli chyba měření. ( $1\sigma = 0,6827$ ,  $2\sigma = 0,9545$ ,  $3\sigma = 0,9973$ )
- Hodnota  $3\sigma$  se považuje za mezní chybu, měření s chybou větší než mezní považujeme za zatížená chybou hrubou a proto do vyhodnocení neuvažujeme



- Lineární kombinace náhodných proměnných s normálním rozdělením je náhodná proměnná, která má opět normální rozdělení.
- Zvláštním případem normálního rozdělení je tzv. standardní normální rozdělení:  $\mu = 0$ ,  $\sigma = 1$
- Distribuční funkci normálního rozdělení nelze analyticky vyjádřit

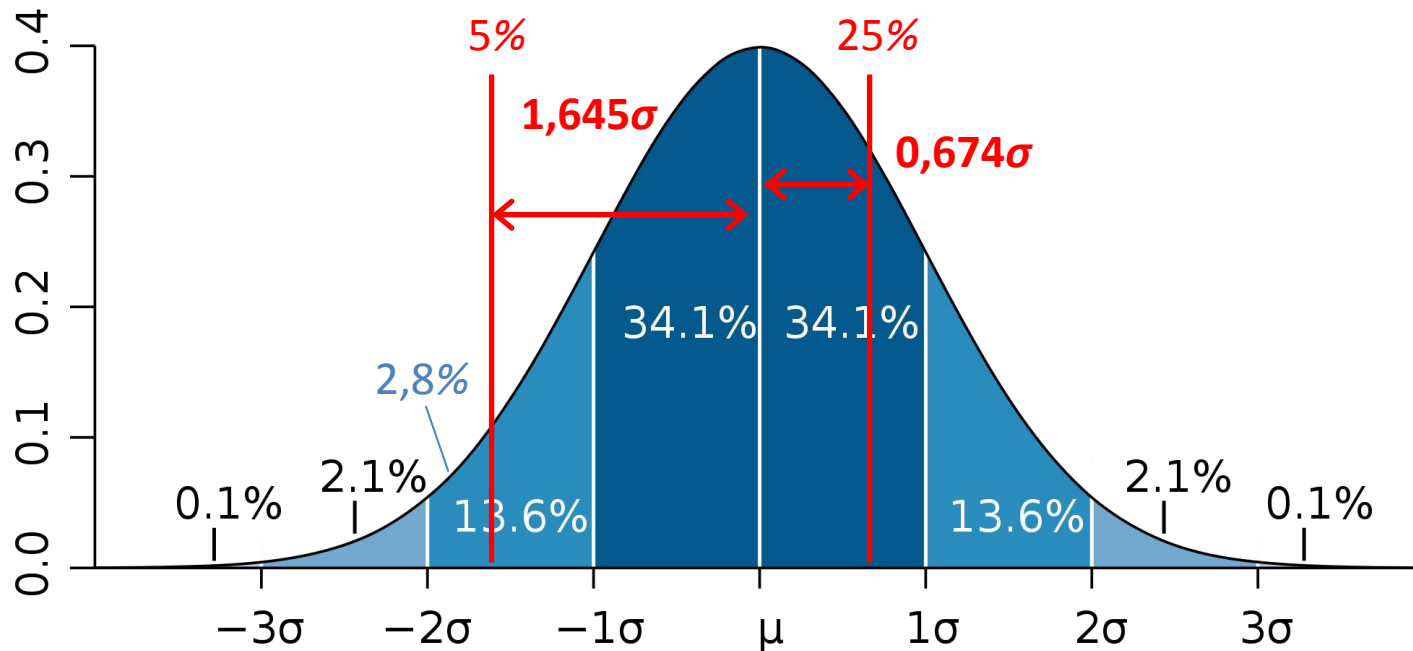


# Další typy rozdělení náhodných veličin

- Rozdělení  $\chi^2$
- Studentovo t-rozdělení
- Logaritmicko-normální rozdělení
- Rovnoměrné rozdělení



# Odhad parametrů normálního rozdělení



- Odhad střední hodnoty:

$$\hat{\mu} = \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

- Odhad směrodatné odchylky:

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{\sum (X_i - \bar{X})^2}{n(n-1)}}$$



## Zápis výsledku

- Měřená veličina = výsledná hodnota  $\pm$  směrodatná odchylka
- Směrodatnou odchylku zaokrouhlujeme na **jednu platnou cifru**
- Platné cifry jsou všechny kromě nul **vlevo** od první nenulové cifry (0,0170 má 3 platné cifry, 17000 má 5 platných cifer,  $1,7 \cdot 10^5$  má 2 platné cifry)
- Výslednou hodnotu zaokrouhlíme na **tolik míst, kolik má zaokrouhlená směrodatná odchylka**

• Příklady zápisu:	Správně:	Nesprávně:
	$21,50 \pm 0,02$	$21,5 \pm 0,02$
	$0,6 \pm 0,3$	$0,56 \pm 0,3$
	$0,23 \pm 0,06$	$0,2341 \pm 0,0567$
	$347 \pm 9$	$347,1 \pm 9$
	$(3,0 \pm 0,2) \cdot 10^5$	$300000 \pm 20000$

# Chyba nepřímo měřené veličiny (zákon přenosu chyby)

- Nepřímo měřená veličina  $Z$  je daná funkcí  $f$  několika přímo měřených veličin  $A, B, C, \dots$ :  $Z = f(A, B, C, \dots)$
- Odhad  $z_0$  skutečné hodnoty  $z$  veličiny  $Z$ :  $z_0 = f(a_0, b_0, c_0, \dots)$
- Odhad směrodatné chyby  $\sigma_{0z}$  je dán vztahem:

$$\sigma_{0z} = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial a} \sigma_{0a}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial b} \sigma_{0b}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial c} \sigma_{0c}\right)^2 \dots}$$

# Speciální případy přenosu chyby

- Násobení konstantou:

$$Z = k * A \rightarrow \sigma_{z0} = k * \sigma_{a0}$$

- Součet (rozdíl):

$$Z = A + B \rightarrow \sigma_{z0} = \sqrt{\sigma_{a0}^2 + \sigma_{b0}^2}$$

- Součin (podíl, mocnina):

$$Z = A^m * B^n \rightarrow \xi_Z = \sqrt{(m\xi_a)^2 + (n\xi_b)^2}$$